Teoremat e Lezhander-Sakerit

Msc. Brikena Sika

Abstract

In this paper we will present three basic Lezhander theorems on the sum of the angles of a triangle in Hyperbolic Geometry. We will bring the definition of the quadrilateral of Saker, together with some statements, then we will give the definition of Lambert's quadrilateral and some statements deriving as the logical deduction of an axiomatic system.

Key words: Defeat, Lezhander's Theorem, Lambert's Tetrahedron, Bearer's Tetrahedron

Abstrakt

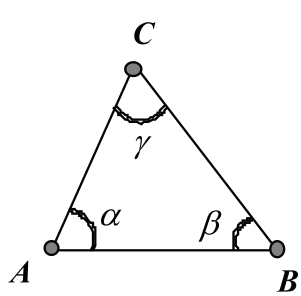
Në këtë material do të paraqesim tri teoremat themelore të Lezhanderit mbi shumën e këndeve të një trekëndëshi në Gjeometrinë Hiperbolike. Do të sjellim përkufizimin e katërkëndëshit të Sakerit, bashkë me disa pohime, më tej do të japim përkufizimin e katërkëndëshit të Lambertit dhe disa pohime që rrjedhin si deduksion logjik i një sistemi aksiomatik.

Fjalë kyce: Defekt, Teorema e Lezhanderit, Katërkëndëshi i Lambertit, Katërkëndëshi i Sakerit.

***

Teorema 1

Shuma e këndeve të brendshëm në cdo trekëndësh është më e vogël, baraz se $2d$ ku d është këndi i drejtë.



$S(\Delta) = \alpha + \beta + \gamma \qquad S(\Delta) \leq 2d$

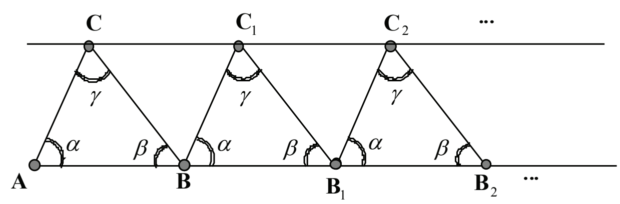
Vërtetim :

Supozojmë të kundërtën sikurse $\alpha + \beta + \gamma > 2d$.

Ndërtojmë trekëndëshat kongruent me $\Delta\, ABC$.

Bashkojmë C me C_1 me C_2 e kështu me radhë, atëherë kemi: α+β+γ > 2d. Këndi i shtrirë ka masën $2d$ pra

$\beta + \delta + \alpha = 2d \rightarrow \delta < \gamma$



Shqyrtojmë $\Delta\, ABC$ dhe $\Delta\, CBC_1$ kemi:

CB e përbashkët $\begin{cases}[BC_1] \equiv [AC] \\ [BC] \equiv [B]\end{cases}$ atëherë

$[CC_1] < [AB]$ δ<γ

Shënojmë $[CC_1] = e$ dhe $[AB] = c$, $[AC] = b$, $[BC] = a$

nc < b+(n-1)e + a
nc – ne < b+a-e $\quad c > e$ në bazë të përkufizimit të krahasimit të segmentëve kemi:

$c = e + a' \qquad e < a + b \qquad a + b = e + b'$

$na' < b'(!!)$ kundërshton aksiomën e Arkimedit pra supozimi i gabuar.

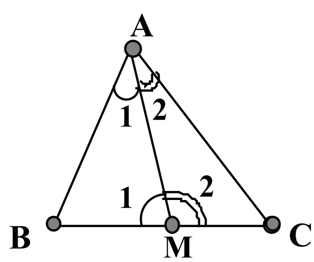
Disa rrjedhime të teoremës Lezhander- Sakerit

1- Shuma e këndeve të brendshëm të një katërkëndëshi është më e vogël baraz se $4d$.

2- Këndi i jashtëm i një trekëndëshi është më i madh, baraz, sesa shuma e dy këndeve të brendshëm jo të bashkëmbështetur me të.

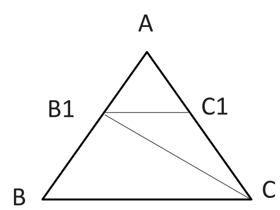
Shënojmë me $def(\Delta) = 2d - S(\Delta)$ quhet defekt i trekëndëshit. Në cdo trekëndësh, defekti i trekëndëshit është me i madh, baraz se zero.

Lema 1
Në qoftë se $def(\Delta ABC) = 0$ atëhere edhe $def(\Delta ABM) = 0$ dhe $def(\Delta AMC) = 0$ janë jonegative:



Lema 2
Është dhënë $\Delta ABC,\ B_1$ dhe C_1 janë pika të brendshme të $[AB]$ dhe $[AC]$ atëherë $def(\Delta AB_1C_1) \le def(\Delta ABC)$.

Ta tregojmë: Ndërtojmë një vijë ndihmëse:



Në bazë të Lemës 1 kemi

$$def(\Delta ABC) = def(\Delta CBB_1) + def(\Delta CB_1A)$$

$$= def(\Delta CBB_1) + def(\Delta CB_1C_1) + def(\Delta AB_1C_1)$$

$$\Delta ABC \ge \Delta AB_1C_1$$

Lema 3
Është dhënë trekëndëshi kënddrejtë ABC sikurse dhe trekëndëshi $\Delta A_1B_1C_1$ kënddrejtë. Në qoftë se $def(\Delta ABC) = 0, a' < a, b' < b$ atëherë $def(\Delta A'B'C') = 0$.

Në rrezen CB marr pikën B_1 e tillë që $[CB_1] \equiv [C'B']$, në rrezen CA marr pikën A_1 e tillë që $[CA_1] \equiv [C'A']$ $\Delta A'B'C'$ dhe ΔA_1B_1C janë kongruentë, kanë dy brinjë dhe këndin ndërmjet tyre kongruentë edhe defehtët janë kongruentë.

Lema 4
Në qoftë se në një trekëndësh kënddrejtë $ABC, def(\Delta A_0B_0C_0) = 0$ atëherë themi që $def(\Delta ABC) = 0$ ku ABC është një trekëndësh por kënddrejtë.

Është dhënë $\Delta A_0B_0C_0$ dhe një trekëndësh cfarëdo ABC

Dallojmë këto raste:
Rasti parë: a< a_0 dhe b< b_0 në bazë të lemës 3 del që $def(\Delta ABC) = 0$

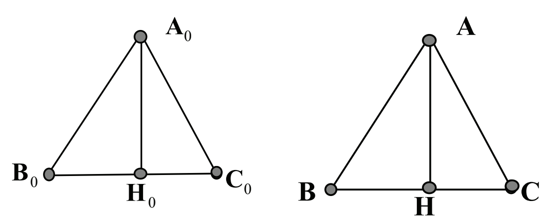
Rasti dytë: a> a_o dhe b> b_0

Rasti tretë: a< a_0 dhe b> b_0

Rasti katërt: a> a_0 dhe b> b_0

Teorema 2
Në qoftë se ekziston një trekëndësh që shuma e këndeve është e barabartë me $2d$ atëherë në cdo trekëndësh shuma e këndeve është e barabartë me $2d$.

Vërtetim



Heqim pingulen AH mbi $[BC]$ sikurse A_0H_0 kemi që $def(\Delta ABC) = def(\Delta ABH) + def(\Delta ACH)$

Gjithashtu $def(\Delta A_0B_0C_0) = def(\Delta A_0B_0H_0) + def(\Delta A_0C_0H_0)$

Derisa $def(\Delta A_0B_0C_0) = 0$ sjell që $def(\Delta A_0B_0H_0) = 0$ dhe $def(\Delta A_0C_0H_0) = 0$. Në bazë të Lemës 4, përderisa ekziston një trekëndësh kënddrejtë që e ka $def = 0$, sjell që defekti në cdo trekëndësh kënddrejtë është e barabartë me zero.

Teorema 3
Në qoftë se, në një trekëndësh ABC cfarëdo $def(\Delta A_0B_0C_0) > 0$ atëherë në cdo trekëndësh ABC

$def(\Delta ABC) > 0$.

Vërtetim

Supozojmë të kundërtën që $def(\Delta ABC) \leq 0$ atëherë kemi $def(\Delta ABC) = 0$ ose $def(\Delta ABC) < 0$.

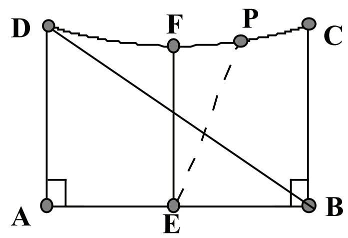
Rasti 1. $def(\Delta ABC) < 0$ nuk është e vërtetë sepse kundërshton Teoremën 1 te Lezhander-Sakerit.

Rasti 2. $def(\Delta ABC) = 0$ sipas Teoremës 2 nqs $def(\Delta ABC) = 0$ atëherë edhe $def(\Delta A_0B_0H_0) = 0$ (!!) sepse ne e kemi pozitive.

Katerkëndëshi i Sakerit.

Përkufizim:

$ABCD$ i cili plotëson këto kushte: $\hat{A} = \hat{B} = d$ dhe $[AD] = [BC]$ quhet katërkëndëshi i Sakerit.



AB është baza e poshtme, DC është baza e sipërme. Shënojmë me E mesin e $[AB]$ dhe me F mesin e $[DC]$. EF quhet vija e mesme e katërkëndëshit te Sakerit.

Pohim 1

Vija e mesme e katerkëndëshit të Sakerit është pingule me të dy bazat e këtij katërkëndëshi.

Vërtetim

Në pikën E ngremë pingule pikën P mbi bazën AB. Pingulja p e pret brinjën DB në një pikë G. Shqyrtojmë ΔADB dhe drejtëzën p. Zbatojmë aksiomën e Pashit për këto dy elementë. Meqënëse drejtëza p e pret AB në pikën E atëherë në bazë të Aksiomës së Pashit ajo do të pres njërën dhe vetëm njërën prej brinjëve AD ose BD. Dimë që kur dy drejtëza janë pingule me një të tretë, janë joprerëse. Mqs (AD) pingule (AB) dhe P pingule (AD) sjell që $P \cap (AD) = \emptyset$

P $\cap [DB] = G$ e tillë që $\overline{DGB}$. Duke shqyrtuar ΔDBC dhe drejtëzën p në bazë të Aksiomës së Pashit duke argumentuar si më sipër njësoj $P \cap (DC) = P$ që të kemi $\overline{DPC}$.

Të tregojmë që $F = P$. Kryejmë rrotullimin në hapësirë të figurës $AEPD$ rreth drejtëzës p kemi mqs E mesi i AB sjell që $A \equiv B$.

$\hat{A} \equiv \hat{B} = d$, $[AD] \equiv [BC]$, $[DP] \equiv [PC]$ sjell që $D \equiv C$. Pra P mesi i DC. Nga një pohim që cdo segment ka vetëm një mes sjell që $F = P$.

$F = P$, ED pingule DC, $EP = EF$. Marrim funksionin atëherë (

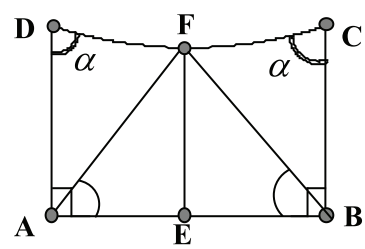
$$\varphi: \begin{cases} FE \to FE \\ FD \to FC \\ F \to F \end{cases}$$

$\widehat{FD\,FE}) \equiv (\widehat{FC\,FE})$

Meqënëse këto kënde janë të bashkëmbështetura te njëra-tjetra sjell që ato janë kënde të drejta pra (EF) pingule (DC).

Pohim 2

Këndet e bazës së sipërme janë kongruentë midis tyre $\hat{D} \equiv \hat{C}$



Vertetim

Sakeri hodhi 3 hipoteza 1. $\alpha > d$ 2. $\alpha = d$ 3. $\alpha < d$

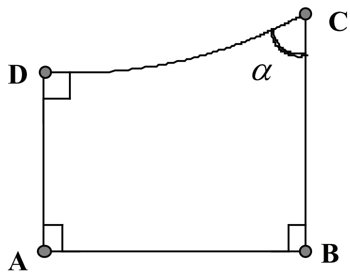
Hipoteza e parë bie poshtë sepse në gjeometruneë absolute ka vend 2 dhe 3. Pranimi i 2 është i njëvlershëm me Aksiomen e 5 të paraleleve të Euklidit. Pranimi i 3 është i njëvlershëm me aksiomën e $5'$ të Jobacekshit.

Është mohimi i aksiomës 5 teëparaleleve. (Gjeometria Hiperbolike).

Katerkëndëshi i Lambertit

Përkufizim:

Katerkëndëshi i lugët: $ABCD$ ku $\hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{D} = d$ quhet katërkëndeshi i Lambertit.



AB dhe DC janë lartësi, AB dhe BC janë bazat dhe D

kënd i ngushtë.
Pohim 1: Baza përballë lartësisë është me e vogël sesa kjo e fundit $[AD] > [BC]$.

Vërtetim
Përderisa këndet $\hat{B}$ dhe $\hat{C}$ janë të drejta atëherë kemi

(AB) pingule (BC) dhe (DC) pingule (BC) kjo sjell

që (AB) dhe (DC) janë divergjente. Dy drejteza janë

divergjente kur ekziston pingule e përbashkët që është e vetme. (BC) pingule e përbashkët e (AB) dhe (DC)

që dy drejtëza i largohen njëra-tjetrës sjell që $[AD] > [BC]$.

Pohim: Baza e sipërme e katërkendëshit të Sakerit është më e madhe sesa baza e poshtme.
Pohim: Dy katërkendeshat e Lambertit janë kongruent në qoftë se kanë kongruente lartësitë e tyre.
Pohim: Dy katërkëndeshat e Lambertit janë kongruent në qoftë se kanë kongruente bazat e tyre.
Pohim: Dy katërkëndësha që kanë dy kënde të drejta në bazë janë kongruentë në qoftë se kanë kongruente bazën e sipërme dhe një brinjë anësore si dhe këndin midis tyre.
Pohim: Dy katërkëndësha me dy kënde të drejta në bazën e poshtme janë kongruente në qoftë se kanë kongruente dy bazat dhe nga një kënd përkatës jo të drejtë.

$$\widehat{[DC] > [AB]}\ \hat{A}\ \text{def}\ (A_0B_0H_0) = 0$$

Përfundime:

- Në bazë të përkufizimeve për trekendëshat dhe katërkendëshat mund të bëhet krahasimi i tyre kur janë kongruent me njëri-tjetrin.
- Shuma e këndeve të brendshme të një katërkendëshi është më e vogël baraz se 4d.
- Këndi i jashtëm i një trekendëshi është më e madhe baraz sesa shuma e dy këndeve.
- Vija e mesme e një trekendëshi që ndodhet në planin hiperbolik është më e vogël sesa ½ e bazës së ketij trekendëshi.

Literatura:
Milnor, John W. (1982) *Hyperbolic geometry: The first 150 years*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) Volume 6, Number 1, pp. 9 – 24.
Reynolds, William F. (1993) *Hyperbolic Geometry on a Hyperboloid*, American Mathematical Monthly 100:442-455.
Maria Dedò (1996): *Trasformazioni geometriche. Con una introduzione al modello di Poincaré*, Zanichelli - Decibel, ISBN 9788808162601
Stillwell, John. (1996) *Sources in Hyperbolic Geometry*, volume 10 in AMS/LMS series *History of Mathematics*.
James W. Anderson, *Hyperbolic Geometry*, Springer 2005, ISBN 1-85233-934-9