Research article

SHUMEFAQESHAT E ZAKONSHEM DHE PLATONIKE

Hysen DOKO
Mesues Matematike për Arsimin e Mesëm, Albania
hysen.doko.hd@gmail.com

Abstract

In this paper we have presented the concept of polygon and convex polygon. Next, we have formulated and proved the Euler's Formula for multiplanes and finally we have presented the Platonic bodies.

Key words: *multiplane, Euler, body, Euler's Formula,*

Abstrakt

Në këtë punim kemi prezantuar konceptin e shumëfaqëshit dhe të shumëfaqëshit konveks. Më pas kemi formuluar dhe vërtetuar Formulën e Eulerit për shumëfaqëshat dhe në fund kemi prezantuar se çfarë janë trupat platonikë.

Fjalë kyçe: *shumëfaqësh, Euler, trup, formula e Eulerit, etj*

1. FORMULA E EULERIT PËR SHUMËFAQËSHAT.

Fillimisht diskutojmë konceptin e shumëfaqëshit, duke i klasifikuar në shumëfaqësha konveks (të mysët) dhe kompakt.

Me gjysmëhapësirë në hapësirën $\mathcal{E}^3$nënkuptojmë pikat që ndodhen në një anë të hiperplanit, përfshirë edhe pikat e hiperplanit.

Gjysmëhapësirat janë nënbashkësi të mbyllura të $\mathcal{E}^3$.

Përkufizim 1: Një shumëfaqësh konveks është një nënbashkësi e $\mathcal{E}^3$ e cila mund të përkufizohet si prerje e një numri të fundëm gjysmëhapësirash.

Nëse në veçanti kjo nënbashkësi eshtë e kufizuar (kompakte) dhe ka pika të brendshme, atëherë quhet *shumëfaqësh*.

Kufiri i një shumëfaqëshi konsiston në të gjitha pikat që ndodhen ne kufirin e të paktën një prej gjysmëhapësirave qe përcaktojnë shumëfaqëshin. Është e qartë që kufiri është bashkimi i gjithë shumëkëndëshave konveks në plane të ndryshme që kufizojnë shumëfaqëshin.

Shënojmë me e numrin e faqeve të shumëfaqëshit, e për numrin e kulmeve dhe v për numrin e brinjëve kufizuese.

1: Për një tetrahedronin (piramidë trekëndore) kemi $e = 6$ $e = 6$ dhe $v = 8,$. Në rastin e kubit kemi $v = 8,$ $f = 6$ dhe $f = 6$.

Teoremë 1: (Formula e Eulerit për shumëfaqëshat). *Për çdo shumëfaqësh kemi*: $v - e + f = 2$.

Vërtetim. Meqë shumëfaqëshi është konveks, është e mundur të shohim kulmet e tij si pika mbi sferë, dhe brinjët e tij si harqe (të një rrethi) në një sferë, duke e "zgjeruar".

Rezultati "shumëfaqëshi sferik" ka të njëjtin numër kulmesh, brinjësh dhe faqesh si shumëfaqëshi origjinal dhe brinjët nuk priten.

Zgjedhim një pikë të brenshme (në brendësi të cilësdo faqeje) dhe projektojmë shumëfaqëshin sferik nga kjo pikë në një plan nga një projeksion stereografik.

Meqë projeksioni stereografik është bijektiv, përmban një konfigurim planar të pikave të lidhura nëpërmjet brinjëve pa ndërprerje, që do ta quajmë rrjeta p_1.

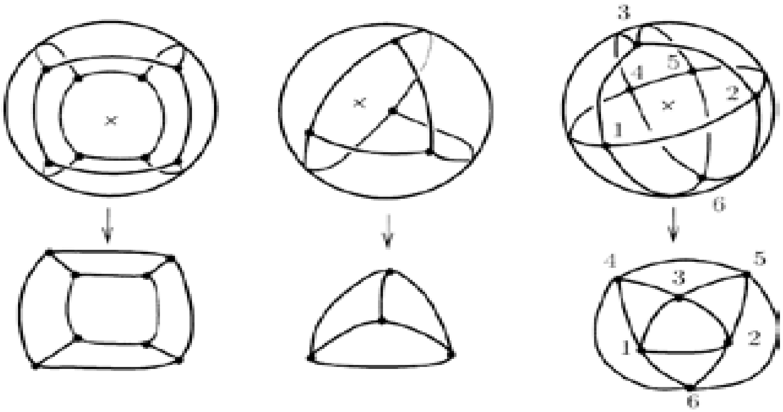
Ajo është gjithmonë e kufizuar nga një kurbë poligonale e mbyllur.

Pozicioni aktual i kulmeve nuk është i rëndësishëm, vetëm brinjët që i lidhin ato.

Brinjët nga ana e tyre nuk janë më segmente, por kurba që lidhin kulmet.

Këtu janë tre shembuj të shumëfaqëshit sferik dhe rezultate të rrjetave planare. Për oktahedrin kemi numëruar kulmet për një kuptim më të mirë.

Fig.1, Oktahedri



Rrjeta p_1 ka të njëjtin numër kulmesh $\mathbf{v_1=v}$ dhe brinjësh $\mathbf{e_1= e}$ si shumëfaqëshi origjinal dhe një faqe më pak, $\mathbf{f_1 = f - 1}$:

faqja e munguar korrenspondon me regjionin më ekstrem të rrjetës, prandaj kemi:

$\mathbf{v_1 - e_1 + f_1 = 1}$.

Për këtë, zgjedhim cilëndo faqe dhe e përthyejmë atë në lidhje me një pikë të vetme. Në këtë proces, n zvogëlohet, n -brinjë zhduken dhe n-kulme bëhen një kulm, kështu rrjeta e re planare $\mathbf{f_2=f_1 -}$ kënaq **:**

$$\mathbf{f_2=f_1 -1,\ v2=v1-(n-1);\ v2=v1-(n-1);}$$

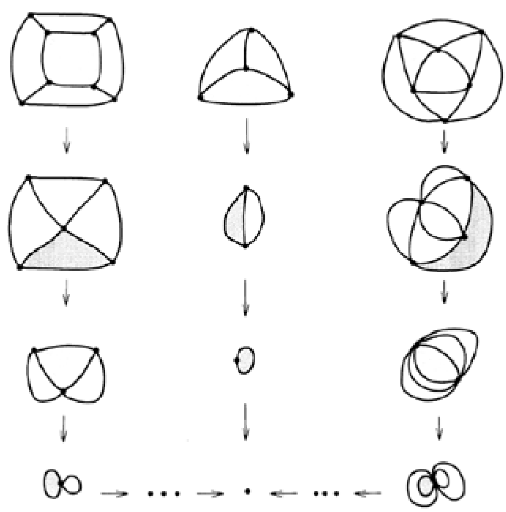
prandaj $\mathbf{f_2 - e_2 + v_2 = f_1 - e_1 + v_1}$

Procesi ipërthyerjeslë numrin e ndërprerjeve të pandryshuar.

Figura e mëposhtme ilustron këtë efekt përthyrje për rrjetën e dhënë më parë, ku faqja e përthyer ngjyroset për hapin tjetër.

Meqë rrjeta ka një numër të fundëm faqesh, pas një numri të fundëm përthyerjesh arrihet në një pikë të vetme.

Fig. Nr.2



Atëherë çdo brinjë mund të lidhet me këtë pikë të vetme pa ndryshuar numrin e përshtatshëm. Përfundimisht, pas k-hapsh, arrijmë në një pikë të vetme dhe atëherë:

$$\mathbf{F_k - e_k + v_k = 0 - 0 + 1 = 1}$$

Formula e Eulerit për shumëfaqëshat mund të formulohet disi në një formë të modifikuar, që jep kombinimin e kulmeve dhe faqeve të shumëkëndëshit nëmënyrë të përshtatshme. Le të jetë i numri i kulmeve të shumëfaqëshit të cilët janë kulmet e faqeve të kufirit në një i - këndësh. Në mënyrë analoge konsiderojmë numrin f_1 të gjithë faqeve të shumëkëndëshit me j kulme.

Atëherë, në mënyrë të qartë kemi:

$$f = \Sigma f_j \quad f = \Sigma f_j$$

Numri e i brinjëve kufitare të një shumëfaqëshi përcaktohet nga këto shuma:

Vërtetim. Çdo segment ka dy kulme. Meqë $2e$ është e barabartë me shumën e gjithë kulmeve të segmenteve që dalin nga secili kulm. Formula e parë rrjedh menjëherë.

Nga ana tjetër çdo segment në kufi i përket dy faqeve të shumëkëndëshit dhe prandaj argumentojmë në të njëjtën mënyrë.

Konsiderojmë shumëfaqëshin special në të cilin çdo kulm i përket ekzaktësisht r -faqeve të shumëkëndëshit dhe në të cilin çdo faqë është një $_{V=V}{}^{-}$ këndësh konveks.

Për më tepër, të gjithë segmentët në kufi janë me gjatësi të barabartë, atëherë shumëfaqëshi quhet i rregullt ose trup Platonik.

Sipas teoremës 2 kemi:

$V=v_r\,,\;\; f=f_s$ $\qquad \frac{m}{\min(r,s)} \geq \frac{1}{r}+\frac{1}{s}=\frac{1}{2}+\frac{1}{e}>\frac{1}{2},$

Për një shumëfaqësh pothuajse të rregullt. Nga formula e Eulerit për shumëfaqëshat rrjedh menjëherë se:

$$\frac{m}{\min(r,s)} \geq \frac{1}{r}+\frac{1}{s}=\frac{1}{2}+\frac{1}{e}>\frac{1}{2}.$$

Mosbarazimi tregon se më i vogli midis dy numrave r dhe 3 është 3 dhe më i madhi nuk e kalon numrin 5. Prandaj ky ekuacion ka një numër të fundëm zgjidhjesh për numrat e plotë. Listojmë këto zgjidhje dhe shumëfaqëshat e rregullt që korrenspondojnë me to:

Fig. Nr.3

r	*s*	*v*	*e*	*f*	*Shembulli i rregullt*
3	3	4	6	4	Tetrahedron
3	4	8	12	6	Kubi
3	5	20	30	12	Dodektahedron
4	3	6	12	8	Oktahedron
5	3	12	30	20	Izosahedron

Duke i kombinuar, marrim të gjithë shumëfaqëshat e rregullt në hapësirën Euklidiane tre dimensionale.

Teoremë 3: Të vetmit shumëfaqësha të rregullt në $\mathcal{E}^2$ janë, tetrahedroni, kubi (heksagoni), dodektahedroni, oktahedroni dhe izosahedroni.

Fig. Nr.4

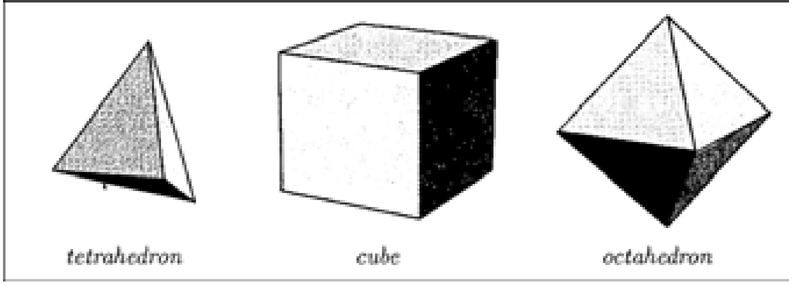
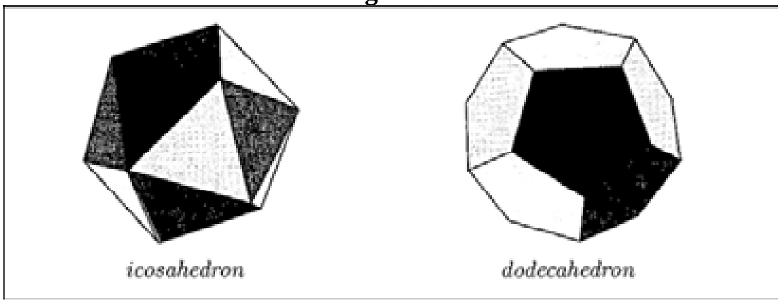


Fig. Nr.5



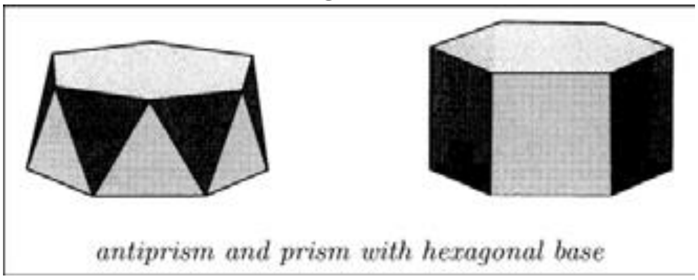
Një shumëfaqësh konveks është quajtur gjysmë i rregullt nëse të gjithë faqet e tij janë shumëkëndësha të rregullt dhe tek secili kulm takohen i njëjti numër shumëkëndëshash të rregullt.

Tek trupat platonikë janë pafundësisht prizma dhe antiprizma dhe ekzaktësisht tridhjetë shumëfaqësha gjysëm të rregullt që zakonisht quhen trupa arkimedianë.

Prizmi konsiston në dynkëndësha të rregullt që ndodhen ekzaktësisht njëri mbi tjetrin me kulmet e tyre që bashkohen me katrorë.

Për të përftuar një antiprizëm rrotullojmë një prej dy n-këndëshave me kënd π / n përreth qendrës dhe më pas lidhen lart e poshtë kulmet “zigzag” nga trekëndësha dybrinjënjishëm.

Fig. Nr.6



Tani listojmë trupat arkimedianë, pa vërtetuar listën e shumëfaqëshave gjysëm të rregullt.

Së pari, katër trupaarkimedianë përftohen nga tetrahedroni, oktahedroni, izosahedroni dhe dodekahedroni duke prerë kulmet dhe duke formuar trekëndësha barabrinjës në vend të tyre.

Këta quhen tetrahedron i thyer, oktahedron i thyer etj. Izosahedroni i thyer është i lehtë për tu njohur si topi i futbollit Europian.

Nëse thyejmë kubin përgjatë një të tretës së brinjëve marrim oktagonin, por nuk është I rregullt.

Për të marrë trupin Arkimedian të duhur duhettë presim një gjatësi $1/(2 + \sqrt{2})$ (nga kubi njësi), duke dhënë kështu kubin e thyer.

Fig. Nr.7

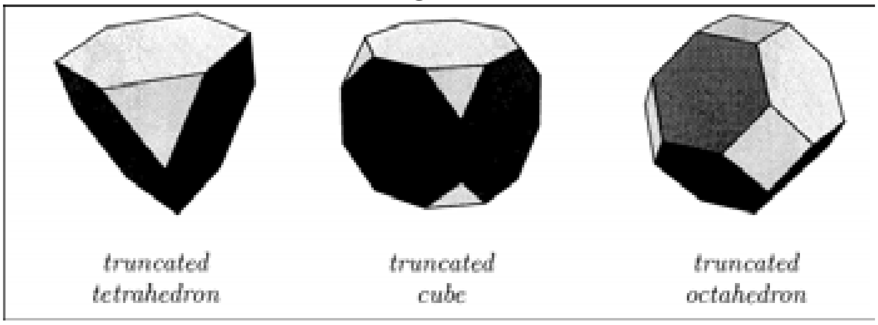
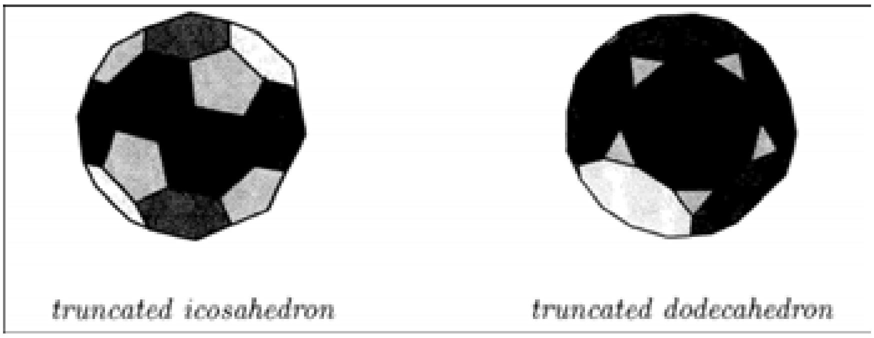


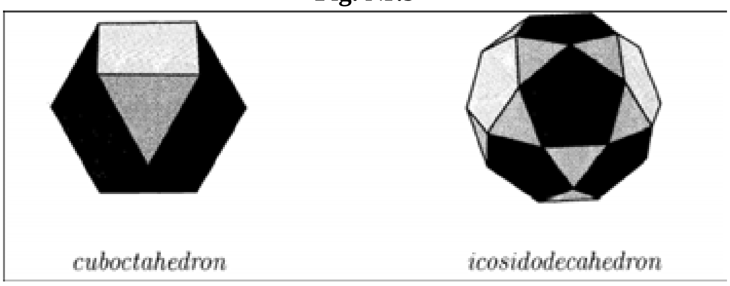
Fig. Nr.8



Dy trupa të tjerë arkimedianë përftohen duke prerë kulmet e një trupi platonik në gjysëm të brinjëve.

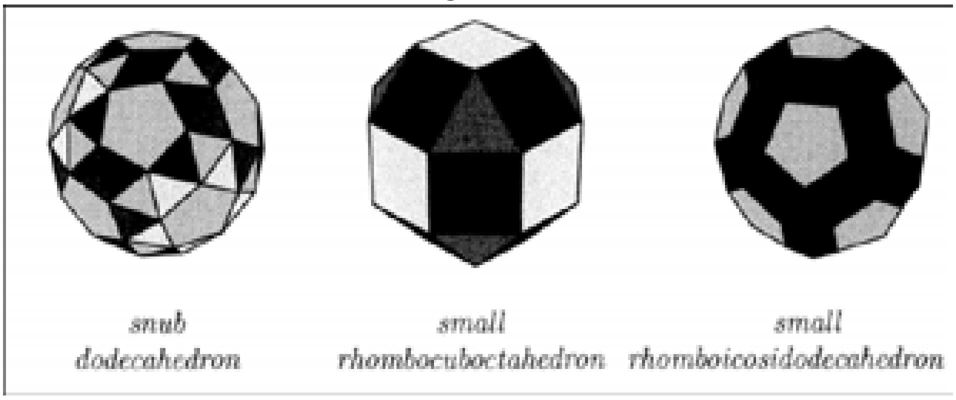
Kubi dhe oktahedroni respektivisht dodektahedron dhe izosahedron, gjithsesi, japin të njëjtat trupa të quajtur kuboktahedron dhe izosidodekahedron.

Fig. Nr.9



Kanë mbetur edhe gjashtë trupa arkimedianë. Ata mund të përftohen në mënyra të ndryshme nëpërmjet prerjeve të komplikuara.

Fig. Nr.10



2. REFERENCA

1.Ilka Agricola, Thomas Friedrich, ELEMENTARY GEOMETRY, (2007), *American Mathematicial Society (AMS)*, ISBN: 978-0-8218-4347-5

2.Vladimir Jorgji, Vefik Qerimi, Induksioni, analogjia dhe arsyetimet e besueshme në matematikë, përkthim I shkurtuar.

3.https://nrich.maths.org/1384

4.https://www.toppr.com/guides/maths-formulas/eulers- formula/